

# 多体纠缠的度量

何天深, 黄俊涵, 朱宇峰, 冯译子, 李泽  
复旦大学物理学系  
(Dated: June 27, 2021)

对于一个量子系统而言, 其子体系间往往存在复杂的纠缠, 而熵可以衡量系统的子体系和整个系统的纠缠。冯诺依曼熵可以精确地衡量纯态下子体系与外界的纠缠状态, 而混态下的多体纠缠至今目前为止没有标准的衡量手段。本文介绍了量子纠缠和熵的基本概念, 包括香农熵和冯·诺依曼熵及其基本性质, 以及用冯诺依曼熵衡量纯态下纠缠的方法。本文还分别介绍了 concurrence 和 3-tangle 对于两体和三体纠缠的衡量方法, 以及在多体问题中推广的合理性和问题。除此之外, 我们比较了文献中所提出的包括蒸馏熵、生成纠缠等在内的对于混态下纠缠的 6 种衡量方法, 考察了其作为熵的基本性质及其合理性。

## I. 引言

一个特定体系的量子态可以用一个矩阵, 即密度矩阵来刻画。当密度矩阵秩为 1 时, 体系为纯态, 可以用一个向量即波函数来刻画, 反之为混态。在纯态下, 某子体系密度矩阵的冯·诺依曼熵用于衡量子体系与外界纠缠; 而在混态下, 一个子体系和外界的纠缠需要用其他类似的熵来衡量, 如互信息、条件熵等, 这些衡量两体纠缠的熵可以被推广以衡量多体间的纠缠。

## II. 量子纠缠与经典熵

### 1. 量子纠缠

若系统处于纠缠态, 那么该系统的量子态无法被分解为局部成分的直积态, 即该系统并非单纯局域的体系的组合, 而是一个不可分割的整体。在量子纠缠中, 我们无法在不考虑外界的情况下描述一个子体系的完整性质, 故在纠缠态中子体系需要结合系统一并考察。纠缠无法在局域被创造, 只有子体系间直接相互作用才会产生纠缠。当系统中一个子体系受到外界如测量行为等影响, 纠缠将被破坏而整个量子系统也会退化。

### 2. 信息熵与纠缠熵

熵是信息论中的一个核心概念, 它衡量了一个物理系统的不确定性。香农熵是经典信息论中的关键概念, 对于一个随机变量  $X$ , 香农熵量化了我们得到  $X$  值之前的不确定性, 或者说它量化了我们在知道随机变量  $X$  的值后所获得的信息。香农熵与概率分布相关联, 其定义如下:

$$H(x) \equiv H(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv - \sum_x p_x \log p_x \quad (1)$$

在定义中, 所有对数均以 2 为底, 同时定义

$$0 \log 0 = 0 \quad (2)$$

其物理意义在于一个不可能发生的事件对熵不应该有任何的贡献。在量子力学的框架内, 量子态有着相似的定义, 只是用密度矩阵替换了香农熵中的概率分布。对于

一个量子态的密度矩阵, 冯·诺依曼熵有如下定义:

$$S(\rho) \equiv -\text{tr}(\rho \log \rho) \quad (3)$$

若  $\lambda(x)$  为密度矩阵的本征值, 冯·诺依曼熵也可表示为:

$$S(\rho) = - \sum_x \lambda_x \log \lambda_x \quad (4)$$

可见, 冯·诺依曼熵本质上与香农熵一致。与香农熵类似, 同样可以用密度矩阵来定义相对熵、条件熵和互信息, 但其性质与香农熵的性质有部分区别。如在密度矩阵的表示体系中, 相对熵定义如下:

$$s(\rho||\sigma) \equiv \text{tr}(\rho \log \rho) - \text{tr}(\rho \log \sigma) \quad (5)$$

考察纯态下子体系的冯·诺依曼熵:  $|GHZ\rangle$  态和  $|W\rangle$  态是两种常见的多体纠缠态, 其具体形式如下:

$$|GHZ\rangle_n = \frac{|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n}}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

$$|W\rangle_n = \frac{|10\dots 0\rangle + |01\dots 0\rangle + \dots + |00\dots 1\rangle}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

在三体问题中可以证明:  $|GHZ\rangle$  态和  $|W\rangle$  态之间无法通过 SLOCC(随机局部操作和经典通信) 进行相互转化, 并且可以借此将所有三体问题分为两大类。根据对称性, 对两个态均选取一个量子比特进行测量考察其子体系与系统的纠缠:  $|GHZ\rangle_n$  态所有的量子比特都会塌缩至同一结果, 而  $|W\rangle_n$  态仅在得到  $|1\rangle$  时塌缩至  $|10\dots 0\rangle$ , 而在测量得到  $|0\rangle$  时, 剩余的  $n-1$  个量子比特构成  $|W\rangle_{n-1}$ 。考察  $|GHZ\rangle_n$  态中由任意  $m$  个量子比特构成的子体系的约化密度矩阵  $\rho_{1\dots m}$ , 取任意数量的量子比特作为子体系, 其约化密度矩阵  $\rho_{1\dots m}$  如下:

$$\rho_{1\dots m} = \text{tr}_{m+1\dots n}(\rho_n) = \frac{I_m}{2} \quad (8)$$

其中  $I_m$  为单位矩阵, 根据定义其冯·诺依曼熵:

$$S(\rho_{1\dots m}) = -\text{tr}(\rho_{1\dots m} \log \rho_{1\dots m}) = 1 \quad (9)$$

对于  $|W\rangle_n$  态的量子态, 考察其中  $m$  个量子比特作为子体系。根据对称性可知, 子体系的取法对熵的计算没有

影响,不妨取前  $m$  个量子比特, 其约化密度矩阵  $\rho_{1\dots m}$  如下:

$$\rho_{1\dots m} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{m}{n} & O \\ O & \frac{E_m}{n} \end{pmatrix}$$

其中  $E_m$  是全 1 矩阵, 将其约化密度矩阵  $\rho_{1\dots m}$  进行谱分解, 其本征值如下:

$$\lambda_1 = \frac{n-m}{n}, \lambda_2 = \frac{m}{n}, \lambda_3 = \dots = \lambda_{m+1} = 0 \quad (10)$$

可计算得到其冯·诺依曼熵:

$$S(\rho_{1\dots m}) = - \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \log \lambda_i = \log n - \frac{n-m}{n} \log(n-m) - \frac{m}{n} \log m \quad (11)$$

而子体系密度矩阵的冯·诺依曼熵的大小可以用于衡量子体系与系统的纠缠, 即可处理纯态体系纠缠的衡量。

### III. CONCURRENCE 与 3-TANGLE

#### 1. Concurrence

Concurrence 是一个与生成纠缠相联系的物理量, 是衡量两个量子比特体系纠缠的重要方式。下面我们将介绍一下 Concurrence 以及在 Concurrence 基础之上提出来的纠缠度量方式。

对于一个二量子比特体系, Concurrence 定义如下。对于一个给定的二量子比特的量子态  $\rho_{AB}$ , 其自旋反转的密度矩阵  $\tilde{\rho}_{AB}$  定义如下:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{AB} (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (12)$$

其中  $\tilde{\rho}_{AB}$  是密度矩阵  $\rho_{AB}$  在基向量  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  下的共轭转置, 而  $\sigma_y$  定义如下:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

由于  $\rho_{AB}$  和  $\tilde{\rho}_{AB}$  都是半正定矩阵, 尽管  $\rho_{AB} \tilde{\rho}_{AB}$  不是埃尔米特阵, 但只有非负的实本征值。将其本征值开根号后降序排列, 并记为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  和  $\lambda_4$ 。那么  $\rho_{AB}$  的 Concurrence  $C_{AB}$  定义如下:

$$C_{AB} \equiv \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (13)$$

当系统  $\rho_{AB}$  处于纯态, Concurrence 也可写作

$$C_{AB} = 2\sqrt{\det(\rho_A)} = 2\sqrt{\det(\rho_B)} \quad (14)$$

其中  $\rho_A(\rho_B)$  是  $\rho_{AB}$  的约化密度矩阵,  $\det(\rho)$  为其行列式。对于一个可分的量子态  $C_{AB} = 0$ , 对于一个最大纠缠的量子态  $C_{AB} = 1$ , 例如贝尔态。那么对于生成纠缠  $E_F(\rho_{AB})$ , 定义如下

$$E_F(\rho_{AB}) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C_{AB}^2}}{2}\right) \quad (15)$$

其中  $h(x)$  的表达式如下:

$$h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x) \quad (16)$$

我们选取平方后的 Concurrence 作为二量子比特体系纠缠的度量方式, 可以将 Concurrence 推广为 I-Concurrence, 对于一个  $d_A \times d_B$  维的纯态  $\rho_{AB}$  体系, 其 I-concurrence 与其约化密度矩阵的纯度有如下关系:

$$C^{(AB)}(\rho_{AB}) \equiv \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\rho_A^2))} \equiv \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\rho_B^2))} \quad (17)$$

这是一个很自然的高维推广。

根据对生成纠缠的定义, 混态体系  $\rho_{AB}$  的 I-concurrence 可以推广为

$$C^{(AB)}(\rho_{AB}) \equiv \inf_{\{p_i, \rho^i\}} \left( \sum_i p_i C^{(I)}(\rho^i) \right) \quad (18)$$

其中  $\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho^i$ , 下确界由所有  $\rho_{AB}$  中可能分解决定。

#### 2. 3-tangle

3-tangle, 记为  $\tau$ , 被用于衡量三体纯态的纠缠, 其定义如下:

$$\tau = C_{i(jk)}^2 - C_{ij}^2 - C_{ik}^2 \quad (19)$$

其中  $i, j, k \in \{A, B, C\}$ ,  $C_{i(jk)}^2$  是量子比特  $i$  和一对量子比特  $(jk)$  的 Concurrence 的平方。经严格的数学推导, 3-tangle 可以表示为:

$$\tau = 4|d_1 - 2d_2 + 4d_3| \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} d_1 = a_{000}^2 a_{111}^2 + a_{100}^2 a_{011}^2 + a_{010}^2 a_{101}^2 + a_{001}^2 a_{110}^2, \\ d_2 = a_{000} a_{111} a_{100} a_{011} + a_{000} a_{111} a_{010} a_{101} + a_{000} a_{111} a_{001} a_{110} \\ \quad + a_{100} a_{011} a_{010} a_{101} + a_{100} a_{011} a_{001} a_{110} + a_{010} a_{101} a_{001} a_{110}, \\ d_3 = a_{000} a_{011} a_{101} a_{110} + a_{111} a_{100} a_{010} a_{001}. \end{cases}$$

$\tau$  又可以表示为:

$$\tau = 2 \left| \sum a_{ijk} a_{i'j'm} a_{npk'} a_{n'p'm'} \epsilon_{ii'} \epsilon_{jj'} \epsilon_{kk'} \epsilon_{mm'} \epsilon_{nn'} \epsilon_{pp'} \right| \quad (21)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{00} = \epsilon_{11} = 0, \\ \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1. \end{cases}$$

### IV. 多体纠缠中总纠缠 (TOTAL-TANGLE) 的推广

#### 1. $N$ 量子比特的互补关系

先考虑  $N$  量子比特纯态的互补关系。对于  $N$  量子比特的纯态  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , 每个量子比特的互补关系由式

22给出 [1]

$$\tau_{k(R_k)} + S_k^2 = 1 \quad (22)$$

其中,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $R_k$  表示除了第  $k$  个量子比特外其他  $(N - 1)$  个量子比特的集合。可理解为  $\tau_{k(R_k)}$  描述了第  $k$  个量子比特与其他  $(N - 1)$  个量子比特的纠缠,  $S_k^2$  描述了第  $k$  个量子比特的单粒子特性。类比上面的总纠缠及韦恩图, 我们也可以在  $N$  量子比特纠缠中建立相应的集合对应关系: 用集合  $I_k$  代表量子比特  $A_k$ ; 不同集合间的交集代表  $\tau_{k(R_k)}$ , 剩余部分代表  $S_k^2$ , 因此有  $I_k = 1$ 。由此, 我们也可以定义对于  $N$  量子比特的集合  $I$ , 有

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N \quad (23)$$

由上式定义可知, 当  $N$  个量子比特处于完全可分离状态时,  $I_k$  之间没有交集, 故  $I$  取最大值  $N$ ; 同理, 当  $N$  个量子比特处于最大纠缠状态时,  $I$  取最小值 1。故有  $1 \leq I \leq N$ 。

## 2. 4 量子比特的总纠缠

接下来考虑将上述概念推广至 4 量子比特体系中。在 3 量子比特体系中, 我们将纠缠分为两部分, 一是 3 路纠缠, 二是 2 路纠缠。考虑一个 4 量子比特体系  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , 可做出如下类比: 对于  $A_1$  的  $\tau_{A_1(A_2A_3A_4)}$ , 可将其分为三部分, 一是 4 路纠缠  $\tau_{A_1A_2A_3A_4}$ ; 二是 3 路纠缠  $\tau_{A_1A_2A_3}$ ,  $\tau_{A_1A_2A_4}$  和  $\tau_{A_1A_3A_4}$ ; 三是 2 路纠缠, 可用 concurrence 表示, 即  $C_{A_1A_2}^2$ ,  $C_{A_1A_3}^2$  和  $C_{A_1A_4}^2$ 。于是, 4 量子比特的互补关系可写为

$$\begin{aligned} & \tau_{A_1A_2A_3A_4} \\ & + \tau_{A_1A_2A_3} + \tau_{A_1A_2A_4} + \tau_{A_1A_3A_4} + C_{A_1A_2}^2 \\ & + C_{A_1A_3}^2 + C_{A_1A_4}^2 + S_{A_1}^2 = 1 \end{aligned} \quad (24)$$

类比 3 量子比特体系, 也可以画出 4 量子比特体系的韦恩图。(如图 1) 因此, 4 量子比特体系的集合  $I$  可被写成

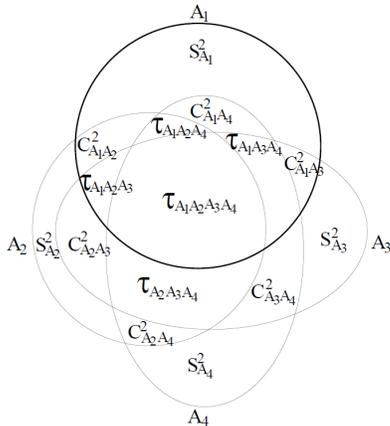


FIG. 1. 4 量子比特韦恩图

$$\begin{aligned} I = & \tau_{A_1A_2A_3A_4} + \tau_{A_1A_2A_3} + \tau_{A_1A_2A_4} + \tau_{A_1A_3A_4} + \tau_{A_2A_3A_4} \\ & + C_{A_1A_2}^2 + C_{A_1A_3}^2 + C_{A_1A_4}^2 + C_{A_2A_3}^2 + C_{A_2A_4}^2 + C_{A_3A_4}^2 \\ & + S_{A_1}^2 + S_{A_2}^2 + S_{A_3}^2 + S_{A_4}^2 \end{aligned} \quad (25)$$

结合式 24, 有

$$\begin{aligned} S_{A_1}^2 = & 1 - \tau_{A_1A_2A_3A_4} \\ & - (\tau_{A_1A_2A_3} + \tau_{A_1A_2A_4} + \tau_{A_1A_3A_4}) \\ & - (C_{A_1A_2}^2 + C_{A_1A_3}^2 + C_{A_1A_4}^2) \end{aligned} \quad (26)$$

又有总纠缠的定义式  $\tau^{(T)} = \frac{4-I}{4-1}$ , 有

$$\begin{aligned} \tau^{(T)} = & \tau_{A_1A_2A_3A_4} \\ & + \frac{2}{3}(\tau_{A_1A_2A_3} + \tau_{A_1A_2A_4} + \tau_{A_1A_3A_4} + \tau_{A_2A_3A_4}) \\ & + \frac{1}{3}(C_{A_1A_2}^2 + C_{A_1A_3}^2 + C_{A_1A_4}^2 + C_{A_2A_3}^2 + C_{A_2A_4}^2 + C_{A_3A_4}^2) \end{aligned} \quad (27)$$

接下来用两个例子来验证总纠缠在 4 量子比特体系中的合理性。考虑 4 量子比特的 GHZ 态:

$$|GHZ\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle)$$

该量子态中只有 4 路纠缠。故式 27 只有  $\tau_{A_1A_2A_3A_4} = 1$ , 其他项均为 0。即

$$\tau_{GHZ}^{(T)} = 1$$

考虑 4 量子比特的 W 态:

$$|W\rangle_4 = \frac{1}{2}(|1000\rangle + |0100\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle)$$

该量子态中没有 3 路和 4 路纠缠, 只有 6 对 2 路纠缠。文献中给出了这六个 2 路纠缠 [2]

$$C_{A_iA_j}^2 = \frac{1}{4} \quad (28)$$

故 W 态的总纠缠为

$$\tau_W^{(T)} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot C_{A_iA_j}^2 = \frac{1}{2}$$

## 3. N 量子比特的总纠缠

为了便于推广到  $N$  量子比特体系, 我们引入一个新的量  $\tau_{A_i}^{(m)}$ , 用以表示体系中关于量子比特  $A_i$  的所有  $m$  路纠缠的和, 即

$$\tau_{A_i}^{(m)} \equiv \tau_{A_1A_2\dots A_m} + \dots + \tau_{A_1\dots A_N} \quad (29)$$

例如, 对于  $N = 4$ , 有

$$\tau_{A_i}^{(2)} = \tau_{A_iA_j} + \tau_{A_iA_k} + \tau_{A_iA_l}$$

$$\tau_{A_i}^{(3)} = \tau_{A_i A_j A_k} + \tau_{A_i A_j A_l} + \tau_{A_i A_k A_l}$$

$$\tau_{A_i}^{(4)} = \tau_{A_i A_j A_k A_l}$$

其中,  $A_i, A_j, A_k, A_l \in \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 。这里我们为了符号上的统一, 用  $\tau_{A_i A_j}$  表示  $A_i$  和  $A_j$  之间的 concurrence 的平方  $C_{A_i A_j}^2$ 。同样地, 我们也可以利用  $\tau_{A_i}$  来表示描述单粒子特性的  $\mathcal{S}_{A_i}^2$ , 尽管并不存在单粒子的纠缠。由此,  $N$  量子比特体系的互补关系就可以写为

$$\sum_{m=1}^N \tau_{A_i}^{(m)} = \tau_{A_i}^{(1)} + \sum_{m=2}^N \tau_{A_i}^{(m)} = 1 \quad (30)$$

接下来引入另一个物理量  $\tau^{(m)}$  以, 描述  $N$  量子比特体系中所有  $m$  路纠缠, 其定义为

$$\tau^{(m)} \equiv \tau_{A_1 A_2 \dots A_m} + \dots + \tau_{A_{N+1-m} \dots A_N} \quad (31)$$

由式 29 和式 31, 我们容易得到

$$\tau^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \tau_{A_i}^{(m)} \quad (32)$$

对于  $N$  量子比特体系的集合  $I$ , 可写为

$$I = \sum_{m=1}^N \tau^{(m)} = \tau^{(1)} + \sum_{m=2}^N \tau^{(m)} \quad (33)$$

结合  $N$  量子比特的互补关系 (式 30), 集合  $I$  可写为

$$I = N - \sum_{i=2}^N (m-1) \tau^{(m)} \quad (34)$$

于是便得到  $N$  量子比特的总纠缠

$$\tau^{(T)} = \frac{N-I}{N-1} = \frac{1}{N-1} \sum_{(m=2)}^N (m-1) \tau^{(m)} \quad (35)$$

仍考虑两个例子以验证总纠缠在  $N$  量子比特体系中的合理性。考虑  $N$  量子比特的 GHZ 态

$$|GHZ\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\dots 0\rangle + |11\dots 1\rangle)$$

其中只有  $N$  路纠缠, 故式 35 中只有  $\tau^{(N)} = 1$ , 其他项均为 0。故

$$\tau_{GHZ}^{(T)} = 1$$

考虑  $N$  量子比特的  $W$  态

$$|W\rangle_N = \frac{1}{N}(|10\dots 0\rangle + |01\dots 0\rangle + \dots + |00\dots 1\rangle)$$

其中只有  $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$  个 2 路纠缠, 其值在文献中给出 [2]

$$\tau_{A_i A_j} = \frac{4}{N^2}$$

故有  $\tau^{(2)} = \frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{4}{N^2} = \frac{2(N-1)}{N}$  故  $N$  量子比特体系中  $W$  态的总纠缠为

$$\tau_W^{(T)} = \frac{1}{N-1} \tau^{(2)} = \frac{2}{N}$$

## V. 纠缠度量的性质

	Von Neumann Entropy	Distillable entanglement	Entanglement of formation	Relative entropy of entanglement	Squashed entanglement	Logarithmic negativity
Normalization	✓	✓	✓	✓	✓	×
No increase under LOCC	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Convexity	×	×	✓	✓	✓	✓
Continuity	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Additivity	✓	×	×	×	✓	✓
Subadditivity	✓	✓	✓	✓	✓	✓

FIG. 2. 纠缠度量性质

多体纠缠的度量多种多样, 各有其不同的适用范围和特点。以下列举几种比较有代表性的纠缠度量及其定义:

1. 可蒸馏纠缠 (Distillable entanglement):  $E_D(\rho)$ , 它的定义式是

$$E_D(\rho) \equiv \sup_{\{\Lambda_{LOCC}\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{\rho_M}^{\text{out}}}{n_{\rho}^{\text{in}}}$$

sup 符号的范围是所有可能的通过 LOCC 实现的纠缠蒸馏过程。

2. 相关熵 (Relative Entropy):  $S(\rho||\sigma)$ , 它被定义为一个量子态与其距离最近的可分离量子态  $\sigma$  的相关熵

$$\begin{aligned} S(\rho||\sigma) &\equiv \text{Tr}(\rho(\log_2 \rho - \log_2 \sigma)) \\ &= \text{Tr}(\rho \log_2 \rho) - \text{Tr}(\rho \log_2 \sigma) \end{aligned}$$

3. 生成熵 (Entanglement of formation):  $E_F(\rho)$ , 任何一个量子态都可以被分解为纯态的凸叠加  $\rho = \sum_i p_i \rho^i$ , 生成熵的定义是所有  $\rho^i$  的约化密度矩阵的冯诺依曼熵的平均值

$$E_F(\rho) \equiv \inf_{\rho = \sum_i p_i \rho^i} \sum_i p_i E_S(\rho^i)$$

inf 符号的范围是所有可能的分解。

4. 对数非负性 (logarithmic negativity):  $E_N(\rho)$ ,

$$E_N(\rho) \equiv \log_2 \|\rho^{\Gamma_A}\|_1$$

$\Gamma_A$  是偏转置操作,  $\|\cdot\|_1$  是迹范数。

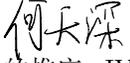
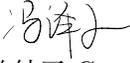
5. 扁纠缠 (Squashed entanglement):  $E_{\text{sq}}$ , 它的定义是

$$E_{\text{sq}}(\rho^{AB}) := \inf \left\{ \frac{1}{2} I(A; B | E) : \rho^{ABE} \text{ extension of } \rho^{AB} \right\}$$

inf 符号的范围是所有满足  $\rho^{AB} = \text{Tr}_E \rho^{ABE}$  的  $E$ 。

我们将不同纠缠的性质整理在表 fig.2 中。

### 分工情况

1. 何天深: 开题前进行了文献调研并初步制定了研究方向, 计算了 II.2 中 GHZ 态和 W 态的冯诺依曼熵, V 中和冯译子共同总结了不同纠缠度量的性质, 撰写了 V, 并绘制了 Fig.2. 
2. 黄俊涵: 研究了总纠缠对多比特情况的推广, IV 中总结了多体纠缠中总纠缠的推广, 撰写了 IV, 整合了所有其他人的文本。 
3. 朱宇峰: 研究了 GHZ 与 W 态的分类以及三体纠缠的度量, II 中总结了量子纠缠和经典熵, 撰写了 I 和 II. 
4. 冯译子: 研究了 concurrence 与 complementarity 的关系, V 中和何天深共同总结了不同纠缠度量的性质。 
5. 李泽: 研究了 concurrence, III 中总结了 Concurrence 和 3-tangle, 撰写了 III. 

- interactions, Phys. Rev. A 72, 052109 (2005).
- [2] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, Phys. Rev. A 62, 062314 (2000).
  - [3] Characterization of Multipartite Entanglement, zur Erlangung des Grades eines, <https://core.ac.uk/download/pdf/46906562.pdf>.
  - [4] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. 2011. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition (10th. ed.). Cambridge University Press, USA.
  - [5] K. G. H. Vollbrecht and R. F. Werner, Entanglement measures under symmetry, Phys. Rev. A 64, 062307 (2001).
  - [6] Peter W. Shor, John A. Smolin, and Barbara M. Terhal, Nonadditivity of Bipartite Distillable Entanglement Follows from a Conjecture on Bound Entangled Werner States, Phys. Rev. Lett. 86, 2681 (2001).
  - [7] ‘Squashed entanglement’: An additive entanglement measure, Matthias Christandl and Andreas Winter, J. Math. Phys. 45, 829 (2004).

---

[1] X. Peng, X. Zhu, D. Suter, J. Du, M. Liu, and K. Gao, Ground-state entanglement in a system with many-body